

de douelle : quant à sa projection verticale, c'est évidemment $L\lambda M$; et l'on opérera semblablement pour toutes les autres arêtes de douelle ($P\pi N$, $P'\pi'N'$),.... Nous les avons tracées ici *en plein*, parce que nous admettons que la projection horizontale est vue en dessous.

678. Développement des panneaux de joint. Puisque la courbe LM est la section droite du cylindre qui forme ce joint, rectifions cette courbe en prenant sur la *fig. 5* les distances

$$M''l''' = M\lambda_3, \quad l'''l'' = \lambda_3\lambda_2, \quad l''l' = \lambda_2\lambda, \quad l'l = \lambda L;$$

puis, en élevant les ordonnées

$$l'''l_3 = Y'\omega'_3, \quad l''l_2 = Y'\omega'_2, \quad l'l_1 = Y'\omega', \quad lL'' = Y'O',$$

nous obtiendrons divers points de la courbe $M''l_3l_2l_1L''$ qui est la transformée de l'arête de douelle ($L'M'$, LM); et en prenant $L''S'' = LS$, on achèvera aisément le contour du panneau de joint $SLMm$. Pour le joint $QPNn$, il faudra rectifier les arcs $N\pi_3$, $\pi_3\pi_2$, $\pi_2\pi$, πP , en conservant les mêmes ordonnées que ci-dessus, et l'on obtiendra le panneau $M''p_2P''Q''$ de la *fig. 5*.

679. Application du trait sur la pierre. On taillera d'abord un *Prisme* droit (n° 653) dont la base soit le polygone $SLMmnNPQR$, et dont la longueur égale au moins la distance des plans verticaux $A'B'$, $E'F'$; puis, sur les faces cylindriques correspondant aux côtés LM , PN , on appliquera les panneaux de la *fig. 5*, exécutés sur un carton flexible auquel on fera prendre la courbure de ces faces; et alors on pourra tracer le contour de la douelle projetée sur $LMNP$, en appliquant d'ailleurs le panneau de tête $LPQRS$ sur la seconde base du prisme. Quant à la taille de cette douelle courbe qui n'est ni gauche, ni développable, il faudra donner à l'ouvrier plusieurs *cercles* découpés suivant la courbure des arcs d'ellipse $\lambda\pi$, $\lambda_2\pi_2$, $\lambda_3\pi_3$; et celui-ci devra les essayer sur la pierre, en les faisant passer respectivement par les points de repère l_1 et p_1 , l_2 et p_2 ,... qui lui auront été fournis par les panneaux de la *fig. 5*. Il est vrai que ce procédé exigera plus de temps, des essais plus nombreux, et offrira moins de précision que si l'on avait pu employer une cerce *constante*; mais ces inconvénients sont inévitables, et ils tiennent à ce que la surface en question n'admet pour génératrice qu'une ligne *variable* à la fois *de forme* et *de position* : aussi l'on évite, autant qu'il est possible, d'employer ces sortes de surfaces dans la stéréotomie.

CHAPITRE IV.

VOUTES SPHÉRIQUES ET EN SPHÉROÏDE.

Voûte sphérique, appareillée par assises horizontales.

680. (Pl. 41, fig. 1.) Cette voûte a pour intrados une demi-sphère engendrée par la révolution du quart de cercle ($A'Z'$, AO) autour de son diamètre vertical

($O'Z'$, O); et la division de cette surface en douelles partielles se fait au moyen de *parallèles* et de *méridiens*. Ainsi, après avoir divisé le demi-cercle $A'Z'B'$ en un nombre impair de parties égales, on imaginera par les points $L'M', \dots$, des plans horizontaux qui couperont la sphère suivant les cercles ($LP, \dots$, $L'P', \dots$), ($MN, \dots$, $M'N', \dots$), $\dots$, lesquels formeront la première série d'arêtes de douelle. La seconde sera fournie par les plans méridiens équidistants AO , EO , $FO, \dots$, qui couperont la sphère suivant des grands cercles, projetés verticalement sur des ellipses telles que $F'P'N'Z'$; cette dernière courbe se construit en rapportant sur le plan vertical les points F , P , N , où la trace du plan méridien FO rencontre les projections horizontales des divers parallèles; mais il faudra interrompre ces sections méridiennes, et les faire alterner dans deux assises consécutives, ainsi que l'indique notre épure, afin de relier plus fixement tous les voussoirs entre eux. Observons, d'ailleurs, qu'ici notre plan vertical représente *une coupe* faite dans l'hémisphère total par le plan méridien AOB , et que la moitié antérieure de la voûte est censée enlevée, afin de laisser voir l'intérieur.

681. Quant aux faces latérales des voussoirs, et nous prendrons comme exemple celui qui a pour douelle le quadrilatère sphérique ($LMNP$, $L'M'N'P'$), les deux *joints montants* ou *joints d'assise* qui passent par les côtés (LM , $L'M'$), (PN , $P'N'$), seront les prolongements mêmes des plans méridiens de ces arcs, attendu que ces plans sont bien normaux à la douelle (n° 584); mais pour les deux *joints de lit* ou les *coupes* qui passent par les arcs de parallèles (LP , $L'P'$), (MN , $M'N'$), il faudra employer les diverses normales de la sphère menées par tous les points de ces arcs, et l'on sait que ces normales forment deux cônes de révolution, engendrés par les rayons $O'L'l'$ et $O'M'm'$, en tournant autour de $O'Z'$. Enfin, ces quatre joints iront se terminer à l'extrados que nous supposons formé par une autre sphère $l'm'z'$ qui a aussi son centre sur la verticale O , mais plus bas que le point O' (voyez n° 610); et la face d'extrados du voussoir sera le quadrilatère ($lmnp$, $l'm'n'p'$). En un mot le voussoir total est engendré par la révolution de la figure $L'M'm'l'$ autour de la verticale $O'Z'$.

682. Il est bon d'observer qu'une pareille voûte peut subsister et se maintenir dans un équilibre parfaitement stable, sans qu'on l'élève jusqu'à la *clef*, pourvu que chacune des assises inférieures soit complètement achevée dans toute la circonférence du parallèle correspondant. En effet, les joints coniques décomposent les actions de la pesanteur sur les voussoirs, en des forces dirigées toutes vers le centre (O , O'); or les voussoirs d'une même assise ne peuvent céder à cette dernière tendance, et descendre en glissant sur leur lit, parce que l'extrados de chacun d'eux a une largeur mn plus grande que l'intrados MN ; de sorte qu'ils se soutiennent mutuellement, en réagissant l'un sur l'autre comme des coins. Il arrive donc souvent, dans une voûte hémisphérique, que l'on supprime la *clef* et plusieurs rangs horizontaux des voussoirs voisins de celle-ci, pour ménager une ouverture par où arrive la lumière; quelquefois aussi on élève, sur la dernière assise conservée, une *lanterne* ou petite tour cylindrique, percée de plusieurs croisées, et recouverte elle-même

d'une calotte hémisphérique; mais nous ne faisons qu'indiquer ces modifications, parce qu'elles ne donnent pas lieu à de nouveaux problèmes de stéréotomie.

APPLICATION DU TRAIT SUR LA PIERRE. On voit que le tracé de l'épure d'une voûte sphérique n'offre que des opérations extrêmement simples, surtout en se dispensant, comme le font les appareilleurs, de marquer les diverses ellipses de la projection verticale; mais il n'en est pas de même de la taille des voussoirs, qui présente un problème délicat à traiter, quand on veut réunir l'exactitude des résultats avec l'économie des matériaux et de la main-d'œuvre: nous allons donc exposer divers procédés dont chacun a ses avantages et ses inconvénients.

685. (*Pl. 41, fig. 3.*) *Méthode par dérobement.* On taillera d'abord un *Prisme* droit (n° 653) $uvxyu'v'x'y'$ qui ait ses deux bases égales au panneau $MNpl$ de la projection horizontale du voussoir (*fig. 1*): cela est facile à exécuter par les moyens indiqués déjà plusieurs fois (n° 653); puis, sur les faces latérales de ce prisme, on tracera les contours $L_2M_2m_2l_2$ et $N_2P_2p_2n_2$ au moyen du panneau de tête $L'M'm'l'$ que l'on aura soin d'appliquer de telle sorte, que ses angles tombent sur les côtés du rectangle, et pour cela il suffira de prendre les distances $M_2u = M'P'$, $L_2u = LM$. Ensuite, sur la face cylindrique antérieure, on tracera l'arc de cercle M_2N_2 , en se servant d'une règle flexible, large et très-mince, que l'on appliquera sur la concavité de ce cylindre; de même, sur la convexité du cylindre postérieur, on tracera l'arc de cercle l_2p_2 ; et enfin, sur les faces inférieure et supérieure, on marquera les deux arcs L_2P_2 et m_2n_2 identiques avec LP et mn .

Cela fait, il deviendra aisé de tailler la douelle sphérique $L_2M_2N_2P_2$, en promenant sur les deux arcs M_2N_2 et L_2P_2 une cerce (*fig. 5*) découpée suivant la courbure de la méridienne $L'M'$, avec le soin d'appuyer cette cerce sur des points qui correspondent deux à deux à un même plan méridien; or, pour obtenir ces points de repère, il suffira de diviser chacun des deux arcs M_2N_2 , L_2P_2 , en un même nombre de parties égales. Quant au joint supérieur $M_2N_2n_2m_2$ qui est une portion de surface conique, on emploiera une simple règle que l'on fera glisser sur les deux arcs M_2N_2 et m_2n_2 , après les avoir encore divisés en un même nombre de parties égales; et l'on opérera semblablement pour le joint inférieur $L_2P_2p_2l_2$ qui est aussi conique. Enfin, l'extrados $l_2m_2n_2p_2$ est une surface sphérique qui s'exécuterait au moyen d'une cerce *concave*, découpée suivant la courbure du méridien $l'm'$; mais ordinairement on ne prend pas la peine de tailler cette face, ou bien on la dégrossit à vue simplement.

La méthode que nous venons d'exposer est celle qui offre le plus d'exactitude dans les résultats, mais elle cause un grand déchet dans les matériaux, et surtout une perte considérable de main-d'œuvre, attendu qu'il ne reste rien de toutes les faces du prisme vertical $MNpl$ qu'on a dû tailler d'abord; aussi les ouvriers ne l'emploient jamais, excepté pour les voussoirs de la première ou des deux premières assises, dans lesquels la forme $A'I'l'a''a'$ du panneau de tête diminue beaucoup les inconvénients signalés ci-dessus. Par ce dernier motif, nous avons dû exposer cette

méthode qui, d'ailleurs, deviendra indispensable dans le cas d'une voûte non sphérique, mais de révolution (*voyez* nos 695 et 701).

684. *Seconde méthode par dérobement.* On peut diminuer le déchet et utiliser des pierres d'un moindre volume, en projetant le voussoir (*fig. 1*) sur le plan vertical OE qui le divise en deux parties symétriques ; les résultats de cette projection, qui est bien facile à construire, sont indiqués sur la *fig. 4*. Alors, après avoir taillé un prisme droit dont la base soit le panneau de projection verticale $G'L'I'M'm'q'g'$ (*fig. 4*), et dont la hauteur égale lp , on portera sur les arêtes de ce prisme les longueurs UG , VL et VP , Xq , Ym et Yn , ZM et ZN ; ce qui, avec les points (l , l') (p , l') faciles à marquer sur les deux bases, fournira quatre points appartenant à chacun des plans verticaux lM , pN , et permettra de tailler ces deux faces planes. Sur ces dernières, on marquera le contour des joints montants ou faces de tête, au moyen du panneau méridien $G'Q'q'g'$; puis, sur les faces horizontales $q'm'$ et $G'L'$, on tracera les arcs circulaires mqn et LGP .

Cela fait, on exécutera le joint conique supérieur dont on connaît actuellement les deux génératrices extrêmes ($M'm'$, Mm), ($M'm'$, Nn) et une directrice (mqn , $q'm'$), en se servant d'une simple règle qui devra glisser sur cet arc de cercle et être maintenue convergente avec les deux bords de la zone conique. Il est vrai que puisqu'on n'aura ici qu'une seule directrice, le mouvement de la règle restera un peu incertain ; mais, comme la concavité de cette face est toujours peu sensible, il suffira de creuser lentement la pierre dans le sens de la règle, jusqu'à ce qu'on puisse y appliquer exactement le panneau $M''N''n''m''$ tracé sur un carton flexible, et qui représente le développement de ce joint conique (on sait qu'il a fallu prendre les arcs $M''N''$ et $m''n''$ égaux en longueur absolue aux arcs MQN et mqn). Quand ce panneau flexible coïncidera bien avec la face concave que l'on aura taillée, il ne restera plus qu'à suivre le bord $M''N''$ de ce panneau, pour tracer sur la pierre l'arc de cercle (MQN , $M'Q'$) qui termine le joint conique supérieur (*).

On opérera semblablement pour le joint inférieur, en se servant de l'arc de cercle (LGP , $L'G'$) déjà marqué sur la pierre, et du panneau $L''P''p''l''$ qui représente le développement de ce joint conique ; ce panneau flexible servira aussi à tracer l'arc circulaire (lgp , $l'g'$) de l'extrados. Enfin la douelle sphérique s'exécutera en faisant glisser une cerce découpée suivant la méridienne $G'Q'$, sur les deux arcs de parallèles (MQN , $M'Q'$), (LGP , $L'G'$), avec le soin d'appuyer cette cerce sur les points de repère qui divisent ces deux arcs en un même nombre de parties égales.

685. (*Pl. 41, fig. 1 et 7.*) *Méthode par l'écuelle.* Dans cette méthode, fort ingé-

(*) Ces moyens suffiront toujours pour un ouvrier intelligent ; mais si l'on voulait donner au procédé actuel toute la précision désirable, il faudrait chercher la courbe d'intersection du joint conique avec le plan projeté sur la corde $L'I'M'$; cette courbe, bien facile à obtenir en projections, puis en *vraie grandeur*, étant rapportée sur la face $L'I'M'$ de la pierre, formerait une seconde directrice qui, jointe à l'arc de cercle (mqn , $m'q'$) déjà tracé, déterminerait complètement le mouvement de la règle qui engendre la zone conique. Ensuite on appliquerait, comme ci-dessus, le panneau développé $M''N''n''m''$ pour tracer l'arc de cercle (MN , $M'Q'$) qui termine le joint.

nieuse et habituellement employée, on commence par creuser dans la pierre que l'on a choisie une calotte sphérique égale à celle que détacherait de l'intrados le plan indéfini qui passe par les quatre sommets (L, L'), (M, M'), (N, N'), (P, P') de la douelle du voussoir; en effet, les cordes qui réuniraient ces sommets sont toutes dans un même plan, puisque d'eux d'entre elles (LP, L'P') et (MN, M'N') sont évidemment parallèles; d'ailleurs ce plan coupe la sphère suivant un petit cercle qui est circonscrit au quadrilatère rectiligne projeté sur LMNP, et qui sert de base à la calotte dont nous parlons. Ainsi, après avoir dégauchi grossièrement l'une des faces *uvxy* de la pierre (*fig. 7*), on y tracera le trapèze $L_2M_2N_2P_2$ identique avec celui du voussoir, en employant des ouvertures de compas égales aux longueurs véritables des côtés et des diagonales; or les deux côtés horizontaux ont pour vraies grandeurs les droites LP et MN, chacun des côtés montants est égal à la corde L'M', et chacune des diagonales a pour vraie longueur le rabattement L'N'; enfin, on tracera un cercle UVXY qui soit circonscrit à ce quadrilatère, ce qui est bien facile (*). Alors on creusera la pierre dans tout l'intérieur de la circonférence UVXY, en faisant pirouetter sur ce contour une cerce (*fig. 5*) levée sur la méridienne A'L'M', avec le soin de maintenir cette cerce dans une situation perpendiculaire au plan UVXY, et de manière qu'elle passe à la fois par des points de repère marqués aux extrémités d'un même diamètre. Une pierre ainsi préparée est appelée *une écuelle*.

686. Maintenant, pour tracer dans cette écuelle le contour de la véritable douelle du voussoir, on prendra une cerce découpée suivant la courbure du parallèle MN, et, après avoir taillé le bord curviligne en biseau, pour obtenir plus de précision, on l'appuiera sur les points M_2 et N_2 , en l'inclinant de manière que ce bord coïncide entièrement avec la surface de la calotte; puis, dans cette situation, on tracera l'arc de cercle M_2N_2 . Par des moyens semblables, on décrira les autres arcs L_2P_2 , L_2M_2 , N_2P_2 , à l'aide de cerces levées sur le parallèle LP et sur la méridienne L'M'; et le contour de la douelle sera achevé.

Ensuite, pour tailler les deux joints de lit (ou les *coupes*) et les deux joints montants qui sont tous normaux à la douelle le long du contour $L_2M_2N_2P_2$, il suffira d'employer un même biveau (*fig. 6*) dont la branche curviligne aura la courbure du méridien A'L' et dont la branche rectiligne sera un rayon prolongé; pourvu qu'en appuyant la branche courbe sur l'écuelle, on ait soin de maintenir le plan du biveau dans une situation normale au contour de la douelle, parce qu'ainsi ce plan coïncidera avec un grand cercle de la sphère. Pour remplir plus aisément cette con-

(*) Il serait plus commode et plus exact de commencer par décrire ce cercle UVXY dont on peut obtenir *à priori* le diamètre, et d'y inscrire ensuite le trapèze dont il ne serait plus nécessaire de connaître les diagonales. Pour cola, il faut observer que le plan vertical OE mené par les milieux des deux bases LP, MN, du trapèze en question, va couper le plan de cette figure suivant une droite qui, prolongée jusqu'aux points où elle perce la sphère, devient précisément le diamètre du cercle circonscrit à ce trapèze. Or, en rabattant ce plan OE sur le plan vertical OA, il est facile de trouver les positions que prendront les milieux des côtés LP, MN; donc, si l'on joint ces milieux rabattus par une droite que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle coupe la méridienne A'L'M' en deux points, la corde interceptée par cette méridienne sera précisément le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

dition, il n'y aura qu'à diviser les deux arcs M_2N_2 et L_2P_2 chacun en 4 ou 6 parties égales, et les points de division correspondants seront des repères qui dirigeront le mouvement du biveau.

Si l'on voulait prendre la peine de tailler l'extrados du voussoir, on appliquerait sur les joints montants qui sont plans, le panneau de tête $L'M'm'l'$ (*fig. 1*); et sur les deux joints coniques on tracerait (*fig. 3*) des arcs m_2n_2, l_2p_2 , parallèles aux arcs d'intrados; puis, on achèverait comme nous l'avons dit au n° 683.

Cette méthode est souvent désignée par le nom de l'architecte *Delarue* qui l'a donnée dans son *Traité de coupe des pierres*, publié en 1728; la suivante est connue sous le nom du *P. Derand*, jésuite, qui l'a proposée dans son *Architecture des voûtes*, imprimée en 1643.

687. Méthode par panneaux de douelle. Disons tout d'abord que cette méthode n'est qu'approximative, et qu'elle serait inadmissible pour des voûtes de petites dimensions; mais quand le rayon de l'intrados atteint 5 ou 6 mètres, on peut l'employer avec confiance, et alors elle présente beaucoup plus de facilité et même de précision que l'usage des cerces dont nous avons parlé au n° 686. Dans l'hypothèse d'un grand rayon, l'arc de méridien $\lambda'\mu'$ (*fig. 2, Pl. 41*) qui détermine la hauteur de la douelle de chaque voussoir, ne diffère pas sensiblement de sa corde; et l'on peut alors regarder cette douelle comme une portion du cône de révolution qui serait engendré par la droite $S'\mu'\lambda'$ tournant autour du diamètre vertical $O'Z'$. Or cette douelle conique est développable; si donc, avec les rayons $S'\lambda', S'\mu'$, nous décrivons des arcs de cercle, et que nous prenions les parties $\lambda'\pi'', \mu'\nu''$, égales aux arcs $\lambda\pi, \mu\nu$, le quadrilatère $\lambda'\mu'\nu''\pi''$ représentera le panneau de cette douelle développée. Cela posé, après avoir taillé l'écuelle de la *fig. 7*, comme il a été dit au n° 685, on appliquera dans cette écuelle le panneau de douelle exécuté sur un carton flexible; puis, en appuyant sur ce panneau, il reprendra sensiblement la forme qui convient à la vraie douelle sphérique, et il permettra de tracer d'un seul coup le contour $L_2M_2N_2P_2$. Quand une fois ce contour est tracé, la taille des joints et des coupes s'effectue comme nous l'avons dit au numéro précédent.

Voûte en cul-de-four.

688. (Pl. 42, *fig. 1*.) On désigne sous ce nom une voûte dont l'intrados est un quart de sphère, qui termine et raccorde un berceau. Ordinairement on appareille cette voûte par assises horizontales, de sorte que les arêtes de douelles sont les demi-cercles $(L'R', LGR)$, $(M'Q', MHQ)$,... contenus dans les plans horizontaux menés par les points de division $L', M', \dots$ du cintre principal du berceau; les joints de lit ou les *coupes* sont des cônes de révolution décrits par le prolongement des rayons $O'L', O'M', \dots$ qui tourneraient autour de la verticale $(O, O'Z')$; et ces joints se raccordent parfaitement avec ceux du berceau, qui sont les plans conduits par les mêmes rayons et par l'horizontale OI . Quant aux joints montants, on les forme avec les plans méridiens menés par la verticale O , en prenant soin d'interrompre et de faire alterner ces joints d'une assise à l'autre. La forme des voussoirs est donc entière-

rement la même que dans la *Pl.* 41, et conséquemment ils se tailleront par les mêmes procédés.

Souvent on ajoute un *arc doubleau* ou une saillie formée par un cylindre ($a'z'b'$, $abcd$) d'un rayon plus petit que celui du berceau; mais il faut toujours que cet arc saillant soit pris sur le berceau même, et non sur la sphère, parce que sur cette dernière surface il produirait un effet choquant pour l'œil. Le lecteur observera que, dans cette épure et dans les suivantes, la projection horizontale est censée *vue par-dessous*; et nous n'y avons marqué que les lignes qui seraient visibles dans cette hypothèse.

689. (*Pl.* 42, *fig.* 2.) Quelquefois on adopte pour l'hémicycle un appareil différent. Après avoir divisé le grand cercle horizontal AIB en un nombre impair de parties égales, on mène par ces points de division des plans verticaux et parallèles LR, MQ, NP, qui coupent la sphère suivant des circonférences que l'on choisit pour arêtes de douelle; les joints de lit ou les *coupes* sont encore des cônes de révolution qui ont leurs sommets au centre (O, O') et pour bases ces diverses circonférences; mais on doit observer que l'axe de ces cônes, au lieu d'être vertical comme précédemment, est ici l'horizontale (OI, O'). Quant aux joints de l'autre série, ils sont formés par des plans méridiens menés suivant l'axe horizontal OI et par des points de division pris en nombre *pair* sur le cercle vertical (AB, A'Z'B'), afin que ces plans prolongés puissent former les joints de lit du berceau, et y laisser un cours de voussoirs qui fasse *clef*. Pour le cul-de-four, la *clef* est remplacée par une espèce de *trompillon* (NP, N'z'P'); car cet appareil offre quelque analogie avec celui des *trompes* dont nous parlerons plus loin.

Les joints méridiens coupent la sphère suivant des cercles dont les projections horizontales, telles que $\alpha\epsilon\gamma\delta I$, s'obtiennent en rapportant sur ce plan les points $\alpha', \epsilon', \gamma', \dots$, dans lesquels la trace O' α' du plan de joint rencontre les divers parallèles de la sphère; et d'ailleurs il faut interrompre ces joints méridiens, et les faire alterner dans deux assises consécutives. Quant à la taille des voussoirs, elle s'effectuera aussi par les mêmes procédés que dans la voûte sphérique (*Pl.* 41), puisque chacun de ces voussoirs est encore compris entre deux plans méridiens et deux surfaces coniques: au surplus, sur la *Pl.* 42, la *fig.* 2 n'est autre que la *fig.* 1, dans laquelle le plan horizontal serait pris pour le plan vertical, et réciproquement.

Niche sphérique.

690. (*Pl.* 42, *fig.* 3.) Cette niche est une cavité ménagée dans un mur, et terminée par un demi-cylindre vertical et de révolution (AIB, A''A'B'B''), lequel est surmonté d'un quart de sphère (AIB, A'Z'B') de même rayon que le cylindre. Cette petite voûte sphérique ne peut plus être appareillée comme les précédentes, parce que le premier rang de voussoirs, adjacent au plan de tête AB, ne se trouverait pas retenu sur le devant, et présenterait fort peu de stabilité. Il faut donc employer ici des voussoirs d'une seule pièce qui convergent vers un point situé à l'intérieur et plus bas que leurs têtes; c'est pourquoi on conduit tous les plans de joint par le

diamètre horizontal (OI, O') et par les points M', L', ..., qui divisent le cintre de face A'Z'B' en un nombre impair de parties égales. Ces plans couperont la sphère suivant des cercles dont les projections horizontales, telles que MmnN, s'obtiendront aisément au moyen de diverses sections parallèles au plan vertical AB : mais, au reste, ces projections sont inutiles pour l'appareilleur, et nous ne les avons tracées ici que comme moyen de description. Ensuite, on prolongera les joints sur le plan de tête, suivant des droites M'T', L'Q', qui devront être terminées aux horizontales également espacées qui séparent les assises du mur, avec lesquelles il est convenable de relier les voussoirs; et l'on pourra mettre un ou plusieurs de ceux-ci en *état de charge* (n° 612), suivant la forme T'S'R', comme le font ordinairement les appareilleurs.

691. Mais, au lieu de prolonger les voussoirs jusqu'au point (I, O') où ils présenteraient des parties très-aiguës qui n'offriraient aucune solidité, il faudra limiter tous ces voussoirs à leur rencontre avec un petit cylindre horizontal (E'P'F', EFGH) que l'on formera d'une seule pierre, et qui reçoit le nom de *trompillon*. Il est vrai que cette surface cylindrique ne remplit pas la condition essentielle d'être normale à la sphère dont une partie composera la douelle du trompillon : sous ce rapport, on devrait former la face de contact des voussoirs avec le trompillon, au moyen d'un cône de révolution qui aurait pour sommet le centre (O, O') de la sphère et pour base le petit cercle (E'P'F', EPF). Mais comme ce joint conique décomposerait la pesanteur de manière à imprimer aux voussoirs une tendance à glisser en avant, et que d'ailleurs la petitesse du rayon O'F' du cylindre rendra toujours peu considérable l'obliquité de ces surfaces, on se contente ordinairement de la forme cylindrique que nous avons assignée ci-dessus au trompillon; au surplus, nous y reviendrons au n° 834.

692. Pour trouver la forme exacte des joints projetés sur P'L'Q' et N'M'T', il suffit de rabattre ces plans autour du diamètre horizontal (O', IO), et l'on verra aisément qu'en prenant sur le plan horizontal les distances BQ'' = L'Q', BT'' = M'T', les panneaux de ces deux joints auront la forme

$$\text{GFBQ}''q'' \quad \text{et} \quad \text{GFBT}''t''.$$

693. (Fig. 3 et 4.) Maintenant, pour tailler le voussoir qui est projeté sur M'N'P'Q'R'S'T' par exemple, on équarrira un prisme droit dont la base npQ₂R₂S₂T₂ soit égale au panneau de projection verticale que nous venons de citer; il est sous-entendu que la face npP₁N₁ sera cylindrique, puisque le côté np du panneau est courbe; mais ce cylindre se taillera encore avec l'équerre ou avec une cerce découpée suivant l'arc N'P'. Sur la base de ce prisme on marquera aussi l'arc L₂M₂ identique avec L'M', et sur le lit de dessus on tracera le contour Q₂L₂P₂P₁Q₁ au moyen du panneau de joint rabattu suivant GFBQ''q''; l'autre panneau de joint GFBT''t'' devra être appliqué sur le lit de dessous pour y tracer le contour T₂M₂N₂N₁T₁. Enfin, sur la concavité du cylindre, on réunira les deux points P₂ et N₂ par un arc de cercle tracé au moyen d'une règle flexible, appuyée sur ces deux points. Cela fait, l'ouvrier abattra la pierre qui dépasse le contour L₂M₂N₂P₂ de la douelle, et il exé-

cutera cette face sphérique au moyen d'une cerce découpée suivant le grand cercle $A'Z'$, laquelle devra glisser sur les deux arcs L_2M_2 et P_2N_2 qu'on aura eu soin de diviser en un même nombre de parties égales, afin de fournir des points de repère qui servent à diriger dans un plan méridien chacune des positions de la cerce mobile.

694. (*Fig. 3 et 5.*) Quant au trompillon ($EFGH$, $E'P'F'$), on fera d'abord tailler avec l'équerre un demi-cylindre de révolution dont la base $E_2P_2F_2$ soit égale au demi-cercle $E'P'F'$ et dont la longueur égale FG : puis, sur la face inférieure $E_2F_2G_2H_2$ on tracera la courbe $E_2I_2F_2$ identique avec l'arc de grand cercle EIF . Alors, il ne restera qu'à creuser la douelle sphérique en dedans du contour $E_2P_2F_2I_2E_2$, ce qui s'effectuera encore au moyen d'une cerce découpée suivant un grand cercle, laquelle sera maintenue aisément dans un plan méridien, en la faisant glisser sur l'arc de tête $E_2P_2F_2$, et passer constamment par le point I_2 , milieu de l'arc $E_2I_2F_2$.

Voûtes de révolution autour d'un axe vertical.

695. (*Pl. 41, fig. 1.*) Tout ce que nous avons dit aux n^{os} 680 et 681 s'applique identiquement à une voûte dont l'intrados serait formé par la révolution, autour d'un axe *vertical*, d'un arc $A'L'M'$ appartenant à une ellipse, à une parabole ou à toute autre courbe, pourvu que cet arc tournât sa concavité vers l'axe de révolution. Dans tous les cas, l'intrados se divise en douelles partielles par des méridiens et des parallèles; les *joints montants* ou *joints d'assise* sont les plans mêmes des arcs méridiens; les *joints de lit* ou les *coupes* sont des surfaces coniques de révolution, formées par les diverses normales de la surface menées par tous les points de chaque parallèle, comme dans la *fig. 1* qui a été tracée pour un méridien circulaire. La seule différence que présenterait le cas général, c'est que les sommets des cônes relatifs aux divers parallèles seraient situés à des hauteurs inégales sur l'axe $O'Z'$, attendu que les normales de la méridienne $A'L'Z'$ n'iraient plus alors couper cet axe au même point; mais cette circonstance n'influe en rien sur la forme des voussoirs, et nous avons cru tout à fait inutile de tracer une nouvelle épure pour ce problème.

Quant à la taille des voussoirs, il faudra nécessairement recourir à l'une des méthodes par dérochement exposées aux n^{os} 683 et 684, attendu que les autres procédés supposent l'existence d'une calotte sphérique; d'ailleurs il faudra ici changer de cerce à chaque assise, puisque les arcs $A'L'$, $L'M'$,... du méridien n'auront plus tous la même courbure. Toutefois, la *clef* de la voûte devra se tailler comme l'*écuelle* du n^o 685.

696. (*Pl. 42, fig. 6.*) UN BERCEAU TOURNANT ou *voûte annulaire* a son intrados formé par la révolution du demi-cercle ($A'M'B'$, AB) autour de la verticale ($O, O'Z'$) qui est située dans le plan, mais en dehors de ce cercle; quelquefois même on adopte pour cette méridienne $A'M'B'$ une demi-ellipse. La division en voussoirs se fait comme ci-dessus, et les joints de lit sont encore des cônes de révolution autour de l'axe ($O, O'Z'$), sur lequel ils ont leurs sommets en $Z', Z'', \dots$. Quant aux pieds-droits, ce sont deux murs cylindriques projetés entre quatre circonférences concentriques, lesquelles doivent être entièrement complètes, à moins qu'il n'y ait un

berceau droit qui vienne se raccorder avec la voûte annulaire le long du méridien ($A'M'B'$, AB). Ici notre plan vertical représente, non pas une projection, mais *une coupe* faite suivant AB ; et sur la projection horizontale qui est censée vue par-dessous, nous n'avons marqué que les lignes visibles dans cette hypothèse.

697. La remarque faite au n° 682 s'applique à la moitié *extérieure* de ce berceau tournant, décrite par l'arc $A'M'$, laquelle pourrait subsister seule en équilibre, quand même on supprimerait tout le reste de la voûte. Mais il n'en est pas de même de la moitié *intérieure* décrite par l'arc $B'N'$ le plus voisin de l'axe de révolution; car les voussoirs de cette partie, tels que NN_2P_2P , tendent, par leur propre poids, à glisser sur le joint conique $P'Z'$ dans un sens qui les éloigne de l'axe, et cette tendance ne peut être arrêtée par la pression des voussoirs contigus de la même assise, puisque l'arête de douelle NN_2 présente une ouverture plus large que l'arc d'extrados nn_2 ; tandis que pour un voussoir LMM_2L_2 de la région extérieure, l'ouverture MM_2 , par laquelle il tendrait à glisser, est plus étroite que l'arc d'extrados mm_2 .

La taille des voussoirs se fera par une des deux méthodes exposées aux n°s 683 et 684; mais nous ne nous arrêtons pas davantage à ce genre de voûte, tout intéressant qu'il est, parce que nous le rencontrerons de nouveau (n° 775) combiné avec un conoïde, et qu'alors nous étudierons cet ensemble avec tous les détails que l'on peut désirer.

Voûtes elliptiques et de révolution autour d'un axe horizontal.

698. Lorsqu'on veut recouvrir entièrement par une seule et même voûte un espace dont le plan offre deux dimensions inégales, il faut donner à l'intrados la forme d'un ellipsoïde; mais pour simplifier les opérations graphiques, on peut encore faire en sorte que cet ellipsoïde soit de révolution autour d'un de ses deux axes horizontaux : si c'est le plus petit, la voûte sera surhaussée, et elle se trouvera surbaissée si c'est le plus grand. Adoptons cette dernière hypothèse; et après avoir tracé l'ellipse de naissance $ABDE$ (*Pl. 43, fig. 1*), faisons-la tourner autour de son grand axe AOD pour engendrer la surface d'intrados : le troisième demi-axe de cet ellipsoïde sera figuré par $O'Z' = O'B'$ sur notre plan vertical qui représente une coupe faite suivant BOE . Quant à l'extrados, nous le formerons avec un ellipsoïde semblable au premier, et engendré par la révolution autour de AOD de l'ellipse XY dont les demi-axes sont proportionnels à OA et OB ; il en résultera que l'épaisseur du pied-droit vers les sommets A et D sera plus considérable qu'aux sommets B et E , ce qui s'accorde avec la nature de la poussée, qui est plus grande dans le sens où la voûte est surbaissée.

699. La première série de joints sera formée par les plans méridiens $L'O'O$, $M'O'O$, $N'O'O$, ..., qui devront diviser l'équateur $B'Z'E'$ en un nombre impair de parties égales; ils couperont l'intrados suivant des ellipses identiques avec ABD , mais dont les projections AMD , AND , ... auront un axe variable qui se trouve en projetant les points M' , N' ... en M , N , ... sur BE . Ces joints plans iront aussi couper l'extrados suivant des ellipses identiques avec XY , mais dont nous n'avons pas

marqué les projections sur notre plan horizontal qui représente seulement la voûte *vue en dessous*.

700. Pour les joints de la seconde série, on commencera par diviser la demi-ellipse de naissance BAE en un nombre impair de parties égales, et par les points de division on mènera des normales Ff, Gg, ..., lesquelles, en tournant avec l'ellipse autour de l'axe AD, engendreront des cônes de révolution : ce seront là les surfaces de joints, mais il faudra les interrompre de deux en deux méridiens, et intercaler d'autres joints coniques décrits par les normales menées aux milieux des arcs BF, FG. D'ailleurs, comme les méridiens prolongés jusqu'au point A y produiraient des parties trop aiguës, il faudra les arrêter au parallèle (GH, G'z'H') et former d'une seule pierre le voussoir GHhg qui sera une sorte de trompillon.

701. Quant à la taille des voussoirs, puisque chacun d'eux, tel que celui qui a pour douelle MNPQ, se trouve compris entre deux plans méridiens et deux zones coniques terminées par des cercles, il suffira d'y appliquer la méthode de dérobolement du n° 685; mais il faudra prendre pour base du *prisme capable* le panneau de projection verticale m'n'P'Q', et pour longueur la distance des parallèles MN et pq. Les deux joints plans seront tracés au moyen d'un panneau levé sur la section méridienne BFfY; et la cerce qui servira à tailler la douelle de ce voussoir devra coïncider avec l'arc d'ellipse BF.

Pour le trompillon, on équarrira d'abord un prisme dont la base soit le quadrilatère GHhXg, et la hauteur égale à gt; puis, après avoir tracé sur la base inférieure l'arc d'ellipse GAH, et sur la face plane et antérieure GH le demi-cercle G'z'H', on creusera la douelle au moyen d'une cerce identique avec GA. Quant au joint conique, il suffira d'employer un biveau (*fig. 9, Pl. 35*) taillé suivant le contour AGg; et en appliquant la branche courbe sur la douelle déjà creusée, dans la direction d'un méridien, la branche rectiligne devra coïncider avec la surface conique que l'on veut exécuter.

702. Le mode d'appareil que nous venons de décrire peut être employé pour une petite voûte dont la plus grande dimension n'excéderait pas 4 ou 5 mètres, par exemple pour recouvrir une chapelle latérale dans une église; mais plusieurs raisons doivent le faire rejeter quand il s'agit d'une grande voûte. D'abord, la convergence des arêtes de douelle vers deux points situés à la naissance présenterait un aspect peu satisfaisant, comme décoration; ensuite, le nombre de ces lignes devant être assez considérable pour qu'à l'équateur leurs intervalles n'exigent pas des pierres d'un trop grand volume, il en résulterait que vers les deux trompillons les voussoirs auraient une trop faible épaisseur et pourraient s'écraser sous la pression générale; d'ailleurs, ceux qui seraient les plus volumineux se trouveraient placés à la plus grande élévation, ce qui serait choquant pour l'œil; et enfin, la pose des voussoirs par assises inclinées à l'horizon offrirait des difficultés pratiques. On préfère donc ordinairement appareiller une voûte dont le plan est elliptique, par assises horizontales; mais alors il se présente des difficultés d'un autre genre, pour éviter les angles aigus dans les coupes et dans les joints.

703. (*Pl. 43, fig. 2.*) Soit AB l'ellipse de naissance qui, en tournant autour de son grand axe AO, engendre un demi-ellipsoïde de révolution, projeté verticalement sur le demi-cercle B'C'D' : c'est là l'intrados de notre voûte; mais pour former l'extrados de manière à remplir les conditions du n° 610, nous tracerons un cercle b'c'd' dont le centre o' soit plus bas que O', et nous regarderons ce cercle comme l'équateur d'un second ellipsoïde de révolution qui aurait son centre en (O, o') et ses axes Od, Oa, proportionnels à ceux du premier; d'où il résultera évidemment que tous les plans horizontaux couperont l'extrados suivant des ellipses semblables à AB. Quant au mur d'enceinte, nous le comprendrons entre les deux cylindres verticaux qui ont pour bases les ellipses semblables AB et XY, afin que ce mur ait plus d'épaisseur vers les sommets du grand axe, où la voûte se trouve surbaissée et exerce par là une poussée plus considérable. Cela posé, après avoir partagé le demi-cercle B'C'D' en un nombre impair de parties égales, nous mènerons par ces points de division des plans horizontaux tels que E'G'ε', F'H'φ',..., lesquels couperont l'intrados suivant des ellipses EG, FH,... semblables à AB, et qui se construiront aisément quand on connaîtra les deux axes de chacune d'elles : or le point E', par exemple, se projette en E qui détermine le demi-axe OE; et l'on en déduira l'autre demi-axe OG, en tirant la droite EG parallèle à la corde BA.

704. Maintenant, pour former le joint de lit correspondant à une arête de douelle (EG, E'G'), les constructeurs emploient ordinairement un cône qui a pour base cette ellipse, et pour sommet un certain point de l'axe vertical (O, O'C'). Toutefois, il faut se garder de placer ce sommet au centre (O, O') de l'ellipsoïde, parce qu'alors la génératrice du cône serait bien normale à la section verticale OB de l'intrados, mais elle se trouverait fort oblique par rapport aux sections verticales voisines de OA; tandis qu'en la rendant normale à une certaine section intermédiaire, telle que OP, on évitera que les angles extrêmes soient très-différents de 90°; et pour bien apprécier cette différence, voici comme il convient d'opérer.

Tous les plans menés par la verticale O coupent l'ellipsoïde suivant des ellipses qui ont un axe commun (O, O'C') : si donc on trace la tangente Z'E' au cercle B'C'D', et qu'après avoir rabattu le point (G, G') en G₂ sur le plan vertical, on mène la droite G₂Z', ce sera la tangente au point (G, G') de l'ellipse projetée sur OGA. Alors, on divisera l'angle G₂Z'E' en deux parties égales par la droite Z'P₂, sur laquelle on élèvera la perpendiculaire P₂S', et le point (O, S') sera le sommet qu'il convient d'adopter pour le cône qui formera le joint passant par l'arête de douelle (EG, E'G'). D'ailleurs, si l'on projette le point P₂ sur le plan horizontal, pour le ramener ensuite en P sur l'ellipse EG, on connaîtra la section verticale OP de l'ellipsoïde à laquelle la génératrice du joint conique est vraiment normale (quoiqu'elle ne le soit pas à l'ellipsoïde même : voyez n° 710); et pour les autres sections verticales, son obliquité ne dépassera pas la moitié de l'angle G₂Z'E'. Par des opérations semblables on déterminera les sommets (O, S'₂), (O, S'₃),... des joints coniques qui devront passer par les autres arêtes de douelle (FH, F'H'),....

705. La disposition que nous venons d'adopter offre un avantage important

pour la taille des voussoirs : c'est que chacun de ces joints coniques ira couper l'extrados suivant *une courbe plane*, qui sera ici une ellipse semblable avec AB. En effet, la génératrice (OE, S', E') allant rencontrer l'ellipsoïde extérieur au point (e', e), si l'on mène par ce point un plan horizontal, ce plan devra couper le joint conique suivant une ellipse semblable à EG, et qui aura l'un de ses sommets au point (e', e) et son centre en (O, g'); mais le même plan horizontal devra aussi couper l'ellipsoïde extérieur suivant une ellipse semblable à AB (n° 703), et conséquemment semblable à EG, laquelle aura encore pour sommet le point (e', e) et pour centre (O, g'); donc ces deux sections elliptiques coïncideront entièrement, et elles donneront la courbe commune à l'extrados et au joint conique. Dès lors, pour tracer cette intersection (elpg..., e'l'p'g'...), il suffira d'employer ses deux axes, dont l'un Oe est connu immédiatement, et dont l'autre Og s'en déduira par une parallèle à la corde AB. De même, pour le joint conique suivant, on tirera le rayon S'F'f', qui fournira le point f' et par suite l'axe Of, d'où l'on déduira, comme ci-dessus, le second axe de l'ellipse (fmn..., f'm'n'...).

706. Quant aux *joints montants* qui servent à partager en plusieurs voussoirs une même assise, par exemple la seconde, on les formera au moyen de plans verticaux LM, PN,..., qui soient simplement normaux à l'ellipse inférieure EG; ou bien, si l'on veut mettre plus de précision, on les rendra normaux à la ligne milieu *vxy* de la douelle, qui est l'intersection de l'intrados avec un plan horizontal *v'x'y'* mené par le milieu de l'arc E'F'. Cette section, qui sera une ellipse semblable à AB, se construira, comme nous l'avons dit précédemment, au moyen du sommet (v', v) qui sera fourni par la rencontre de l'arc E'F' avec le plan sécant *v'x'y'*.

Ces joints verticaux couperont l'intrados suivant des arcs elliptiques L'x'M', P'y'N, dont on déterminera au moins trois points d'après les rencontres des traces horizontales LM, PN; avec les ellipses ELP, *vxy*, FMN; ils couperont le joint conique engendré par la droite S', E'e', suivant des arcs d'hyperbole L't'l', P'u'p', dont les divers points s'obtiendront aussi en combinant, sur le plan horizontal, les traces Ll, Pp, avec les ellipses ELP, *elp*, et avec une troisième *rtu* qui résultera de la section faite dans ce cône par le plan horizontal *r't'u'*. Enfin, les mêmes joints verticaux couperont le joint conique engendré par S'F'f' suivant des hyperboles M'm', N'n', et l'extrados suivant des ellipses l'm', p'n'; courbes qui se construiront toutes comme ci-dessus, en faisant des sections par un plan horizontal intermédiaire entre F' et f'. Alors le voussoir que nous avons considéré dans la seconde assise, se trouvera complètement défini par ses deux projections

$$MNpl \text{ et } L'M'N'P'p'l'm'n'.$$

707. (Fig. 4.) *Panneaux de tête.* Les faces du voussoir contenues dans les plans verticaux *ML* et *Np* de la *fig. 2*, ne sont connues qu'en projection sur la *fig. 3*; pour les obtenir en vraie grandeur, comme on le voit dans la *fig. 4*, on prendra les abscisses *Mm*, *Mx*, *ML*, *Mt*, *ML*, égales aux lignes de mêmes noms sur la droite

MI du plan horizontal, et on élèvera les ordonnées MM' , mm' , xx' ,... égales aux hauteurs des points correspondants de la *fig. 3*, ce qui permettra de tracer le panneau de tête $LM'm'l'$. En employant de même les abscisses mesurées sur la droite Np du plan horizontal, on trouvera l'autre panneau de tête $PN'n'p'$, qui a été ici transporté à une distance quelconque du premier.

708. (*Fig. 5.*) La taille du voussoir s'effectuera par dérobement, en équarissant d'abord une pierre sous la forme d'un prisme droit qui aurait une base $l_2M_2N_2p_2$ égale à la projection horizontale $LMNp$, et dont la hauteur égalerait la distance des deux horizontales $E'L'P'$, $f'm'n'$, sur la *fig. 3*. Ensuite, en appliquant les deux panneaux de la *fig. 4* sur les faces latérales de ce prisme, on tracera les contours $L'M'm'l'$, $P'N'n'p'$ des deux têtes du voussoir; au moyen d'une règle flexible appuyée sur les points M' et N' , on tracera la courbe $M'N'$ sur le cylindre concave de la pierre, et la courbe $l'p'$ sur le cylindre convexe; enfin, sur les deux bases, les courbes $L'P'$ et $m'n'$ se traceront au moyen de cerces découpées suivant les arcs elliptiques LP et mn de la *fig. 2*. Cela posé, on taillera la douelle en se servant de trois cerces découpées suivant les arcs d'ellipse LP , xy , MN , de la *fig. 2*, avec le soin de les appuyer sur les points correspondants des courbes $L'x'M'$, $P'y'N'$, et de les maintenir dans une situation horizontale : on pourrait, il est vrai, employer une cerce unique découpée suivant la méridienne BA , mais il serait difficile de la maintenir dans la situation convenable, attendu que les plans verticaux ML et NP ne comprennent pas des portions identiques des divers méridiens. Quant au joint supérieur, c'est un cône qui s'exécutera en promenant une règle sur les deux courbes $M'N'$, $m'n'$, de manière qu'elle passe par les repères qui y sont marqués; et ceux-ci s'obtiennent en traçant sur la *fig. 2* divers rayons vecteurs partant du point O , et qui aillent couper les ellipses MN et mn . On opérera semblablement pour le joint inférieur; et pour l'extrados, on emploierait des cerces concaves découpées suivant les ellipses lp , mn , et une autre ellipse intermédiaire; mais ordinairement cette face est laissée brute, ou ébauchée simplement à vue.

Quant à la clef de cette voûte elliptique, après avoir marqué sur les deux faces opposées et parallèles de la pierre les deux ellipses d'intrados et d'extrados, on dressera avec la règle le tronc de cône qui enveloppe cette clef; et pour creuser la douelle, il suffira d'employer trois cerces découpées suivant les ellipses contenues dans les plans verticaux OA , OB et un diamètre intermédiaire. La première de ces ellipses est identique avec la méridienne AB ; la seconde coïncide avec le cercle $B'C'D'$, et la troisième s'en déduira aisément.

709. (*Fig. 2.*) SECONDE MÉTHODE pour les joints de lit. Lorsque les deux axes OA et OB de l'ellipse de naissance sont très-inégaux, le cône que nous avons employé au n° 704 et dont la génératrice est seulement normale au point (P, P') de la section verticale OP , se trouverait encore assez oblique par rapport aux sections extrêmes OA et OB . Dans ce cas, il vaut mieux former le joint passant par l'arête de douelle $(EG, E'G')$ avec trois ou plusieurs surfaces coniques différentes, qui se succéderont tour à tour depuis E jusqu'en G . Ainsi, après avoir construit, comme au

n° 704, les trois tangentes $Z'E'$, $Z'P_2$, $Z'G_2$, on leur mènera des perpendiculaires par les points E' , P_2 , G_2 ; et ces perpendiculaires iront couper l'axe ($O'Z'$, O) en des points O' , S'_1 , S''_1 , qui seront les sommets de trois cônes dont le premier servira depuis E jusqu'en L et en I : le second depuis P jusqu'en L et R : et le troisième de G en R et ρ . Mais comme les joints montants sont à recouvrement dans deux assises consécutives, il arrivera dès lors que chaque voussoir de la première assise offrira, dans son joint supérieur, un *ressaut* produit par le brusque passage d'un cône à un autre, ainsi qu'on le voit indiqué dans la *fig. 6* tracée en perspective. Il en arrivera autant pour les joints supérieurs de la seconde assise qui seront en contact avec les joints inférieurs de la troisième; et dès lors les voussoirs présenteront beaucoup d'angles rentrants, ce qui est toujours un inconvénient, attendu que les ouvriers les exécutent avec moins de facilité et surtout moins de précision; mais on accepte ici ce désavantage, afin d'éviter le défaut bien plus grave de parties trop aiguës où la pierre offrirait peu de résistance à la pression mutuelle des voussoirs.

710. TROISIÈME MÉTHODE pour les joints de lit. Le cône que nous avons employé au n° 704 n'est pas véritablement *normal à la surface d'intrados*, même dans le point (P , P') où sa génératrice a été choisie perpendiculaire à la tangente de la section verticale OP ; car il faudrait en outre que cette génératrice fût perpendiculaire à la tangente de la section horizontale (EPG , $E'G'$). Si donc la voûte offre assez d'importance pour que l'on s'attache à remplir complètement cette condition, voici comme il faudra opérer.

Après avoir pris sur l'arête de douelle ($G\varepsilon$, $G'\varepsilon'$) (*Pl. 43, fig. 7*) un point quelconque (π , π'), on construira la normale de l'ellipsoïde en ce point; or, cette droite devant être perpendiculaire à la tangente *horizontale*, elle se projettera suivant la normale $\pi\zeta$ de l'ellipse $G\pi\varepsilon$; et sa projection verticale sera le rayon $O'\pi'$, attendu que dans toute surface de révolution, la normale va couper l'axe qui est ici projeté au point O' . Ensuite, il faudra chercher le point (θ , θ') où cette normale va percer l'ellipsoïde d'extrados, lequel est aussi de révolution, mais autour d'une axe différent (OX , o'), et pour méridienne une ellipse dont les axes Od et Oa sont proportionnels avec OB et OA . Pour obtenir ce point (θ , θ'), je conçois par la normale ($\pi\zeta$, $\pi'O'$) un plan perpendiculaire au plan vertical de projection : ce plan sécant $\pi'\varepsilon'$ coupera l'extrados suivant une ellipse dont le centre (ω , ω') s'obtient en abaissant la perpendiculaire $o'\omega'$, et dont un des axes est ($\omega'\varepsilon'$, $\omega\varepsilon$); mais cette ellipse est semblable à la section qui serait faite par le plan parallèle $o'V'$, et qui aurait pour axes $o'V'$ et Oa ; donc, si l'on tire la corde Va , et qu'on lui mène la parallèle $\varepsilon\alpha$, on déterminera les deux axes $\omega\alpha$ et $\omega\varepsilon$ de l'ellipse suivant laquelle se projette la section faite par le plan $O'\varepsilon'$. Alors, en construisant cette ellipse $\varepsilon\theta$ (ou seulement l'arc voisin de la droite $\pi\zeta$, ce qui s'effectue très-aisément par la *méthode de la somme des demi-axes*), cette courbe $\varepsilon\theta$ ira couper la normale $\pi\zeta$ au point demandé θ que l'on projettera ensuite sur $O'\pi'$ en θ' .

Si l'on construit semblablement les normales de l'ellipsoïde d'intrados pour les points (ε , ε'), (λ , λ'), (π , π'), (ρ , ρ'),... et qu'on cherche de même leurs points d'in-

tersection $(\delta, \delta'), (\psi, \psi'), (\theta, \theta'), (\eta, \eta'), \dots$ avec l'extrados, l'ensemble de toutes ces normales formera le joint *normal* qui correspond à l'arête de douelle $(G\epsilon, G'\epsilon')$. Ce joint sera évidemment une surface *gauche*, et il se terminera à la courbe à double courbure $(\partial\psi\theta\eta\gamma, \partial'\psi'\theta'\eta'\gamma')$ suivant laquelle il coupe l'extrados.

711. Le sommet (γ, γ') de cette courbe ne peut pas s'obtenir comme les autres points, parce que la normale en (G, G') est située dans le plan vertical OA perpendiculaire à la ligne de terre; mais en rabattant ce plan autour de l'horizontale (OA, O') , le point (G, G') se transportera en G'' sur l'ellipse méridienne AD, et si l'on mène à cette courbe la normale $G''\gamma''$, ce sera le rabattement de la normale primitive. D'ailleurs, le même plan vertical OA coupait l'extrados suivant une ellipse dont le centre était en (O, o') et qui avait pour axes Oa et $o'c'$; or, quand cette ellipse aura tourné comme ci-dessus, son centre sera venu en o'' , et ses axes seront parallèles et égaux à Oa et Od ; donc, si l'on trace cette ellipse ainsi rabattue, ou seulement l'arc qui sera voisin de $G''\gamma''$, cette droite se trouvera coupée par l'arc d'ellipse au point demandé γ'' . Il restera ensuite à relever cette normale $G''\gamma''$ autour de l'axe (OA, O') , ce qui ramènera le point γ'' en γ sur le plan horizontal; et sur le plan vertical, la projection γ' s'obtiendra en prenant la hauteur $O'\gamma'$ égale à $\gamma\gamma''$.

712. (*Fig. 7 et 5.*) Pour l'autre arête de douelle $(H\phi, H'\phi')$ on construira le joint normal comme celui du n° 710: et ces deux joints de lit seront coupés par les plans verticaux $\mu\psi, \nu\theta$, suivant des lignes droites, ce qui rendra encore plus facile le tracé des panneaux de tête du voussoir actuel, analogues à ceux de la *fig. 4*. Quant à la taille de ce voussoir, après avoir préparé, comme dans la *fig. 5*, une pierre qui ait la forme d'un prisme droit dont la base égalerait $\mu\psi\theta\nu$, on y appliquera les deux panneaux de tête, et l'on y tracera les arcs d'ellipse $L'P', M'N'$, comme au n° 708. Toutefois, la courbe plane $l'p'$ sera remplacée ici par une ligne à double courbure $(\psi\theta, \psi'\theta')$ qu'il faudra construire par points sur la face convexe du prisme, ou bien elle se tracera au moyen d'un panneau qui représenterait le développement du cylindre vertical $\phi\theta$; ensuite, l'autre arête d'extrados $m'n'$ deviendrait encore une ligne à double courbure; mais on la remplacera par l'intersection de la face horizontale et supérieure du prisme, avec le joint gauche qu'il sera bien facile de prolonger, sur la *fig. 8*, jusqu'à ce plan horizontal: ses joints, quoique gauches, se tailleront encore avec une simple règle appuyée sur des points de repère. Nous nous bornons ici à ces indications succinctes, parce qu'elles suffiront bien pour les lecteurs familiarisés avec la Géométrie descriptive; d'ailleurs, nous leur présentons cette méthode comme un sujet d'exercice plutôt que comme une méthode pratique, attendu que les constructeurs ordinaires la trouveraient probablement trop laborieuse et répugneraient à l'employer, malgré l'avantage qu'elle procure d'éviter les angles aigus dans les coupes, et par suite de donner plus de résistance aux voussoirs.

Voûte en ellipsoïde à trois axes inégaux.

713. (*Pl. 44.*) Considérons enfin le cas général où la voûte a pour intrados un demi-ellipsoïde à trois axes inégaux, et soit ABDE l'ellipse de naissance qui renferme l'axe maximum $OA = a$ et l'axe moyen $OB = b$, tandis que l'axe minimum ($O, O'C'$) est vertical et égal à c , ce qui rend la voûte surbaissée : la *fig. 2* représente une coupe verticale faite suivant OB , et la *fig. 3* une coupe verticale faite suivant OA . Quant à l'extrados, nous le formerons comme au n° 703, par un ellipsoïde semblable au premier, mais ayant son centre au-dessous de O' sur la verticale O . Ici, pour satisfaire complètement à la condition que tous les joints soient *normaux entre eux* et à l'intrados (n° 584), nous adopterons pour les deux séries d'arêtes de douelle, les *lignes de courbure* de l'ellipsoïde dont nous avons expliqué les propriétés aux n°s 736, ..., 743 de notre *Géométrie descriptive*. On sait qu'après avoir marqué les foyers F, F_2, F_3 , des trois ellipses principales, il faut tracer l'ellipse et l'hyperbole *auxiliaires*, $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$, dont les axes communs sont les droites

$$O\alpha = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad O\beta = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

la première se construit en prenant les longueurs $Of = OF, Of_3 = O'F_3$, puis en tirant la droite Af_3 et sa parallèle $f\alpha$: la seconde en prenant $Of_2 = O'F_2$, puis en traçant la ligne Bf_2 et sa parallèle $F\beta$. Alors, si l'on prend un point quelconque h sur l'hyperbole $\alpha\beta$, et que l'on trace les coordonnées hH et h_2 de ce point, elles fourniront les deux demi-axes OH et O_2 de l'ellipse H_2 qui représente la projection d'une ligne de la *première courbure* : de même, un point quelconque q de l'ellipse $\alpha\beta$ fournira, par ses coordonnées, les deux demi-axes OQ et O_3 de l'hyperbole QM qui reçoit la projection d'une ligne de la *seconde courbure*.

Quant à la *fig. 2*, il faudra aussi tracer d'abord l'ellipse et l'hyperbole *auxiliaires*, $\alpha'\beta'$ et $\alpha'\gamma'$, dont les axes communs sont les droites

$$O'\alpha' = c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad O'\beta' = b\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

qui se construiront aisément, ainsi que l'indique notre épure; et alors un point quelconque t' de l'ellipse $\alpha'\beta'$ fournira, par ses coordonnées, les deux axes $O'H'$ et $O'u'$ de l'hyperbole $H'z'$ suivant laquelle se projette ici une ligne de la première courbure; tandis que chaque ligne de la seconde courbe se projettera, sur ce plan, suivant une ellipse $Q'M'$ dont les axes seront fournis par les coordonnées d'un point m' pris à volonté sur l'hyperbole auxiliaire $\alpha'\gamma'$. On sait d'ailleurs que les points (α, α') et (ω, α') sont les deux *ombilics* (*G. D.*, n° 739) autour desquels l'ellipsoïde présente une courbure uniforme dans tous les sens, comme celle d'une sphère.

714. Mais, pour la question de stéréotomie, il ne faut pas tracer arbitrairement ces deux séries de lignes de courbure. On devra d'abord diviser la demi-ellipse

verticale $B'C'E'$ en un nombre *impair* de parties égales; et après avoir projeté chaque point de division, tel que $2'$, au point 2 sur le plan horizontal, on mènera les coordonnées $2h$ et hH de l'hyperbole auxiliaire, ce qui déterminera les axes de l'ellipse $2H$ suivant laquelle se projette l'arête de douelle qui correspond à l'assise considérée. Ensuite, pour avoir la projection verticale de cette même arête de douelle, il faudra projeter le sommet H en H'' sur l'ellipse principale de la *fig.* 3; et ce dernier point H'' étant ramené en H' sur la *fig.* 2, permettra de tracer les deux coordonnées $H't'$ et $t'u'$ de l'ellipse auxiliaire, lesquelles seront les demi-axes de l'hyperbole demandée $H'2'$.

Maintenant, on divisera le quart AB de l'ellipse horizontale en parties égales $BL, LM, MN, \dots$; puis, en projetant le point M en M' , on mènera par ce dernier les deux coordonnées $M'm'$ et $m'Q'$ de l'hyperbole auxiliaire, qui fourniront les axes de l'ellipse $M'Q'$. Ensuite, après avoir ramené le sommet Q' en Q'' sur l'ellipse principale de la *fig.* 3, on projettera ce dernier point Q'' en Q , et l'on tracera les deux coordonnées Qq et qs de l'ellipse auxiliaire, lesquelles seront les axes de l'hyperbole cherchée QM .

Les lignes de seconde courbure, telles que $(QM, Q'M')$, serviront à former les joints montants, et il faudra les interrompre alternativement d'une assise à l'autre; tandis que les lignes de première courbure, telles que $(2H, 2'H')$, qui forment les arêtes de douelle et correspondent aux joints de lit, devront être continuées dans toute leur étendue. C'est d'ailleurs ce que montre l'épure, dans les trois autres quarts de l'ellipsoïde qui n'ont pas servi à effectuer les opérations graphiques.

715. Nous n'avons point parlé jusqu'ici de la projection des lignes de courbure sur le plan de la *fig.* 3, attendu que cette projection n'est pas nécessaire pour le problème de stéréotomie. Mais si l'on veut compléter la représentation graphique, il faudra encore tracer une ellipse *auxiliaire* $X''Z''$ dont les axes seront

$$O''X'' = a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \quad O''Z'' = c \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}},$$

grandeur qu'il est facile de construire, comme l'indique notre épure; ensuite, après avoir ramené le point $2'$ en U'' , on tracera les coordonnées $U''T''$ et $U''2''$ qui seront les axes de l'ellipse $T''H''2''$ sur laquelle se projette la ligne de première courbure $(2H, 2'H')$. Quant à la ligne de seconde courbure $(MQ, M'Q')$, elle se projettera aussi sur une ellipse $M''Q''e''$ dont les deux axes s'obtiennent en projetant le point M en M'' , puis en traçant les deux coordonnées $M''v''$ et $v''e''$ de l'ellipse auxiliaire. On voit donc que, sur le plan de la *fig.* 3, les lignes de courbure des deux séries se projettent toutes sur des ellipses, lesquelles se trouvent tangentes à la corde $X''Z''$ qui touche elle-même l'ellipse principale $A''C''$ à l'endroit de l'ombilic α'' .

716. (*Pl.* 44.) *Des joints normaux.* Considérons le voussoir qui a pour douelle le quadrilatère curviligne projeté sur $\lambda\mu\nu\pi$ (*fig.* 1), et dont les quatre côtés se coupent déjà à angles droits dans l'espace, d'après la propriété des lignes de courbure (*G. D.*, n° 702). Il faudra d'abord construire le plan tangent de l'ellipsoïde au point

(λ, λ') , en le faisant passer par les deux droites qui auront pour projections horizontales et verticales les tangentes aux courbes $\lambda\mu$, $\lambda\pi$, et $\lambda'\mu'$, $\lambda'\pi'$; tangentes faciles à tracer, puisque ces courbes sont des sections coniques dont on connaît les deux axes. Ensuite, perpendiculairement à ce plan tangent, on mènera la normale $(\lambda\rho, \lambda'\rho')$ dont on cherchera la rencontre (ρ, ρ') avec l'ellipsoïde d'extrados : pour cela, on conduira par la droite $(\lambda\rho, \lambda'\rho')$ un plan perpendiculaire au plan vertical, et qui coupera l'extrados suivant une ellipse dont on trouvera les axes en les comparant à ceux de la section parallèle faite par le centre, ainsi que nous l'avons exécuté au n° 710; alors la rencontre de cette section elliptique avec la normale déterminera le point demandé (ρ, ρ') .

En opérant semblablement pour les normales menées par divers points $\varphi, \mu, \dots$ de l'arête de douelle, on déterminera le joint de lit relatif à cette arête, lequel sera une zone de surface *développable* (*G. D.*, n° 699) comprise entre la courbe $(\lambda\mu, \lambda'\mu')$, la courbe d'extrados, et deux droites. On trouvera de même le joint supérieur relatif à l'arête de douelle $(\pi\nu, \pi'\nu')$, et les deux joints montants qui passeront par les lignes $(\lambda\pi, \lambda'\pi')$, $(\mu\nu, \mu'\nu')$; et ces quatre joints seront évidemment rectangulaires entre eux, en même temps qu'ils se trouveront exactement normaux à l'intrados.

717. De la taille du voussoir. On opérera par dérobement, en commençant par tailler un prisme droit (*voyez* n° 653) dont la base égale la projection horizontale du voussoir, et dont la hauteur soit suffisante pour contenir la projection verticale de ce même corps. On plongera les quatre joints jusqu'à ce qu'ils coupent les faces de ce prisme; et en rapportant ces courbes d'intersection sur le solide capable, on pourra tailler les quatre faces qui renferment les joints, au moyen d'une simple *règle*, puisque ce sont des surfaces développables. Sur ces faces, on appliquera les panneaux des joints développés en vraie grandeur, à l'aide desquels on marquera les contours véritables de la douelle et de la face d'extrados, si l'on veut prendre la peine de tailler cette dernière; et alors la douelle s'exécutera au moyen de plusieurs *cercles* découpées suivant diverses sections verticales que l'on construira dans l'ellipsoïde d'intrados.

718. Vers les ombilics, il faudra ordinairement supprimer quelques joints et réunir deux voussoirs, afin que les pierres aient assez d'épaisseur pour offrir une résistance suffisante; et c'est ce que l'on voit indiqué sur les *fig.* 1 et 3, dans les environs du point (ω, ω'') . Au surplus, si nous nous sommes bornés à des indications succinctes dans les n°s 716 et 717, c'est que le problème actuel doit être considéré comme un exercice de stéréotomie plutôt que comme une méthode pratique réellement employée, attendu que la longueur des opérations graphiques qu'exige le tracé de l'épure, rebuterait probablement les constructeurs ordinaires. Aussi, quand ils doivent exécuter une voûte elliptique à trois axes inégaux, ils emploient le mode d'appareil de la *Pl.* 43 (*fig.* 2 et 3), avec la modification que nous avons indiquée au n° 709 pour les joints coniques discontinus qu'ils multiplient davantage.